Répartitions des sièges

MICHEL BALINSKI

Il n'existe pas de méthode idéale de répartitions des représentants élus du peuple, mais une méthode proposée par le mathématicien Sainte-Laguë donne des résultats parfaits en pratique. Hélas, elle n'est pas souvent appliquée.

Le nombre de députés à l'Assemblée nationale élus dans les départements est de 570.
Article LO 119 du Code électoral.

Le problème semble simple : comment partager un nombre donné de sièges entre les départements? Pour atteindre l'idéal il faudrait les répartir au *prorata* des populations des départements, mais puisqu'un siège ne se démembre pas, la proportionnalité exacte n'est pas réalisable.

Toute la difficulté commence là. Elle a engendré un menu riche en méthodes, paradoxes et impossibilités.

Quelles sont les pratiques électorales en France? Variées. La question se pose dans au moins deux cas : l'attribution des sièges de l'Assemblée nationale, et des sièges des Conseils régionaux. De longs débats parlementaires, truffés de déclarations de principes – mais confrontés à des calculs de cuisine dont le but était d'assurer à certains petits départements un ou deux sièges de plus – ont abouti à des tableaux de chiffres auxquels n'est associée aucune explication. Les méthodes les plus connues (et les seules citées aux débats) sont sans doute les répartitions «à la plus forte moyenne» et «aux plus forts restes».

Le pouvoir exécutif français déclara que la méthode de la plus forte moyenne «est la seule qui donne, autant que faire se peut, sinon à chacun son dû, du moins une part exacte. Par définition, le système au plus fort reste est aléatoire. C'est par un hasard statistique que tel ou tel sera élu ici ou là...» Pourquoi alors avoir réparti les sièges de l'Assemblée nationale et ceux des conseils régionaux selon deux méthodes différentes, ni l'une ni l'autre qui soit «la seule qui donne, autant que faire se peut...»?

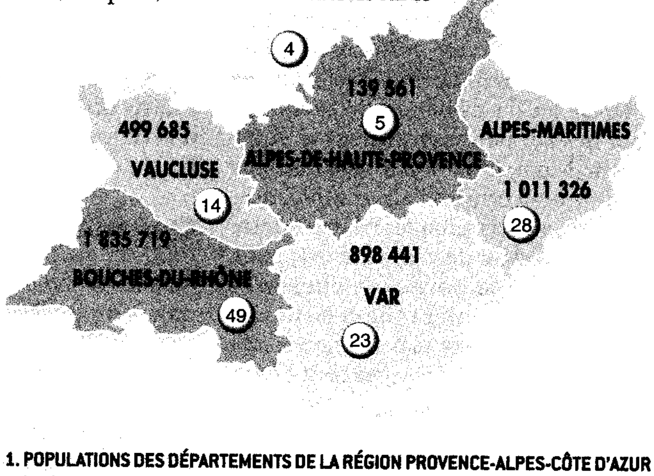
La liste des méthodes de répartition est longue et les dénominations des méthodes, une cacophonie (souvent plusieurs noms avec des règles de calcul d'apparence différentes ne sont que des avatars d'une seule méthode). Nous verrons que la méthode pratiquée pour l'attribution des sièges des Conseils régionaux est assujettie aux pires paradoxes, tandis que celle utilisée pour répartir l'Assemblée nationale souffre d'un favoritisme démesuré envers les petits départements. Néanmoins, une méthode, proposée par un mathématicien français, Sainte-Laguë, est la meilleure pour ces deux problèmes, ce qui sera démontré.

Les Conseils régionaux

Le territoire de la République est divisé en 26 régions, où sont élus 1 880 conseillers. La plupart de ces régions regroupent plusieurs départements, et il faut répartir équitablement les sièges de chaque Conseil entre ses départements. Une méthode a été utilisée – deux fois, en 1985 sur la base du recensement de 1982 et en 1991 à partir du recensement de 1990 – mais pas explicitée : après tout, à une autre occasion elle pourrait ne pas plaire...

Pour chaque Conseil, la solution fut calculée en allouant, pour commencer, un siège de Conseiller par département, puis à répartir les sièges suivants par la méthode du plus fort reste que nous allons détailler sur un exemple. On désigne cette méthode par «1 + PFR».

Concrètement, calculons la répartition de 117 sièges aux 6 départements du Conseil régional de la région Provence-Alpes-Côte d'Azur dont la population est de 4 506 151 âmes. On attribue un siège à chaque département, soit 6 au total, et il reste 111 sièges à pourvoir. Combien de conseillers généraux devons-nous attribuer, en plus,



1. POPULATIONS DES DÉPARTEMENTS DE LA RÉGION PROVENCE-ALPES-CÔTE D'AZUR selon le recensement de 1999 et les 123 conseillers généraux affectés aujourd'hui à ces départements sur la base du recensement de 1990. Si la méthode 1 + PFR était utilisée en prenant en compte le recensement de 1999, il faudrait transférer un conseiller des Alpes-Maritimes au Var.

a

DÉPARTEMENTS	POPULATIONS	1	QUOTE-PART	PARTIE ENTIÈRE	RESTE	PFR	1+PFR
BOUCHES-DU-RHÔNE	1 835 719	1	45,219	45	0,219	45	46
ALPES-MARITIMES	1 011 326	1	24,912	24	0,912	25	26
VAR	898 441	1	22,131	22	0,131	22	23
VAUCLUSE	499 685	1	12,309	12	0,309	12	13
ALPES DE Hte-PROVENCE	139 561	1	3,348	3	0,348	4	●
HAUTES-ALPES	121 419	1	2,991	2	0,991	3	4
TOTAL	4 506 151	6	111	108	3	111	117

b

DÉPARTEMENTS	POPULATIONS	1	QUOTE-PART	PARTIE ENTIÈRE	RESTE	PFR	1+ PFR
BOUCHES-DU-RHÔNE	1 835 719	1	46,441	46	0,441	46	47
ALPES-MARITIMES	1 011 326	1	25,585	25	0,585	26	27
VAR	898 441	1	22,729	22	0,729	23	24
VAUCLUSE	499 685	1	12,641	12	0,641	13	14
ALPES DE Hte-PROVENCE	139 561	1	3,531	3	0,531	3	●
HAUTES-ALPES	121 419	1	3,072	3	0,072	3	4
TOTAL	4 506 151	6	114	111	3	114	120

2. MÉTHODE DES PLUS FORTS RESTES, appliquée à la région Provence-Alpes-Côte d'Azur pour l'attribution des sièges de Conseillers régionaux, dans le cas où il y a 111 *(a)* et 114 sièges *(b)*. Les quotes-parts sont les parts proportionnelles des départements ; par exemple, pour les Alpes-Maritimes, la quote-part est égale à (1 011 326/4 506 151) × 111, soit 24,912. Dans un premier temps, la méthode des plus forts restes (PFR), accorde à chaque département la partie entière de sa quote-part ; puis dans un deuxième temps, les sièges qui restent à pourvoir (ici 3) sont alloués aux départements ayant les parties fractionnaires des quotes-parts les plus grandes (Hautes-Alpes, Alpes-Maritimes, Alpes-de-Haute-Provence). La méthode 1+PFR ajoute un siège à chaque département. Les méthodes de type PFR ont un grave inconvénient, elles amènent le paradoxe «plus-pour-tous, moins-pour-un» : quand le nombre total des sièges à répartir augmente («plus-pour-tous»), les quotes-parts des grands départements croissent plus rapidement que celles des petits : donc, le reste 0,438 des Alpes-de-Haute-Provence, qui donne droit à un siège de plus dans un conseil de 111 personnes, croît certes à 0,531, mais ce reste est dépassé par d'autres qui ont plus augmenté («moins-pour-un»). Le département Alpes-de-Haute-Provence perd un siège alors que plus de sièges étaient attribués.

DÉPARTEMENTS	POPULATIONS	1	QUOTE-PART	PARTIE ENTIÈRE	RESTE	PFR	1+PFR
BOUCHES-DU-RHÔNE	↘ 1 834 719	1	45,495	45	0,495	↗ 46	↗ ●
ALPES-MARITIMES	1 001 326	1	24,830	24	0,830	25	26
VAR	888 441	1	22,031	22	0,031	22	23
VAUCLUSE	489 685	1	12,143	12	0,143	12	13
ALPES DE Hte-PROVENCE	↗ 140 761	1	3,490	3	0,490	↘ 3	↘ ●
HAUTES-ALPES	121 419	1	3,011	3	0,011	3	4
TOTAL	4 476 351	6	111	109	2	111	117

3. LE PARADOXE PLUS-MOINS, MOINS-PLUS, EN PROVENCE-ALPES-CÔTE D'AZUR. Supposons que, en 2009, par rapport au recensement de 1999 indiqué sur les figures 2*a* et 2*b*, le nombre d'habitants des Bouches-du-Rhône diminue de 1 000 personnes en 2009, alors que celui des Alpes-de-Haute-Provence augmente de 1 200 personnes : il ne faudrait pas attribuer plus de Conseillers généraux aux Bouches-du-Rhône et en même temps moins aux Alpes-de-Haute-Provence. Paradoxalement, les méthodes PFR et 1 + PFR transfèrent un siège du deuxième au premier de ces départements!

DÉPARTEMENTS	POPULATIONS	1	QUOTE-PART	PARTIE ENTIÈRE	RESTE	PFR	1 + PFR
BOUCHES-DU-RHÔNE	1 835 719	1	45,528	45	0,528	46	47
ALPES DE Hte-PROVENCE	139 561	1	3,461	3	0,461	3	4
HAUTES-ALPES	121 419	1	3,011	3	0,011	3	4
TOTAL	2 096 699	3	52	51	2	52	55

4. INCOHÉRENCE : si l'on regroupe les habitants des Bouches-du-Rhône, des Alpes-de-Haute-Provence et des Hautes-Alpes, on devrait *(voir la figure 2a ci-dessus)* partager entre ces départements 55 sièges. Toutefois le regroupement de ces trois entités en un sous-ensemble, puis les affectations selon la méthode 1 + PFR, donnent des résultats différents des affectations obtenues à partir de l'ensemble général Provence-Alpes-Côte d'Azur : (47, 4, 4) et non (45, 5, 4). Paradoxal.

5. LA RÉDUCTION EN NOMBRES ENTIERS DE NOMBRES FRACTIONNAIRES

Le problème de tirer un nombre entier de quantités physiques fractionnaires n'est pas nouveau et s'est posé avec acuité lors de l'établissement du calendrier : l'année dite «tropique» est l'intervalle de temps entre deux passages consécutifs de la Terre en un même point de sa trajectoire. On mesure cette durée en jours, la durée d'un jour correspondant à une rotation de la Terre sur elle-même. La difficulté du calendrier est que l'on ne peut avoir une portion de journée en plus ou en moins à la fin de l'année : l'éminent astronome Christophe Clavius (1538-1612), conseiller du Pape Grégoire exprima la difficulté en termes concis : *Annum civilem necessario constare ex diebus integris*, ce qui signifie, «Les années du calendrier se composent nécessairement d'un nombre entier de jours». On pourrait paraphraser Clavius en énonçant, pour les élections que : «Le nombre de députés par département est nécessairement un nombre entier.»

au Vaucluse dont la population est de 499 685? La fraction de la population du Vaucluse par rapport à la population totale est (499 685) / (4 506 151), soit 11,089 %. Ce que l'on nomme sa quote-part des 111 conseillers est 111×0,11089, soit 12,309. On lui attribue alors 12 conseillers supplémentaires, la partie entière de 12,309. On opère de même pour les cinq autres départements *(voir la figure 2a)* en attribuant ainsi 108 sièges. Subsistent alors 3 sièges à pourvoir, que l'on attribue en prenant les plus forts restes, c'est-à-dire que les Alpes-Maritimes, les Alpes-de-Haute-Provence et les Hautes-Alpes ont encore un conseiller régional de plus.

Paradoxes… et principes

a) Plus-pour-tous, moins-pour-un

Si le nombre total de sièges à attribuer augmentait, toutes choses égales par ailleurs, serait-il juste que la représentation d'un département soit diminuée? Non! Pourtant PFR, la méthode des plus forts restes, et donc aussi 1+PFR, amènent cette possibilité : le paradoxe «plus-pour-tous, moins-pour-un.» Quand le Conseil régional de Provence-Alpes-Côte d'Azur passe de 117 à 120 sièges, le département des Alpes-de-Haute-Provence passe de 5 à 4 conseillers.

Ce paradoxe, aussi dénommé le «paradoxe de l'Alabama» du nom de l'État qui, en 1882, fut sa première victime, provoqua à l'époque un tollé au Congrès américain résumé dans le compte rendu de séance :

Voyons cette nouvelle méthode, cette nouvelle révélation des mathématiques.

Je pensais, Monsieur le Président, que la mathématique était une science divine. Je pensais que la mathématique était la seule science qui s'adressait à l'inspiration et était infaillible dans ses dires. On m'a appris toujours qu'elle démontre la vérité. On m'a dit qu'alors qu'en astronomie et philosophie et géométrie et toutes les autres sciences, il y avait toujours matière à spéculer, que la mathématique – telle la parole Révélée – disait quand elle parlait, «Ainsi dit le Seigneur». Mais voici un nouveau système des mathématiques qui démontre que la vérité est fausse.

De la nécessité d'éviter ce phénomène, on déduit un premier principe :

(a) Une méthode doit toujours être en accord avec une augmentation de sièges à pourvoir : avec plus à partager, aucun département ne devrait recevoir moins de sièges.

b) Plus-moins, moins-plus

Examinons un second traumatisme mathématique : si le nombre d'habitants d'un département augmente alors que celui d'un autre département diminue, serait-il juste que la délégation du premier perde des sièges au profit de la seconde? Non! Pourtant PFR, la méthode des plus forts restes, et donc 1+PFR, laissent se faire cette possibilité toute aussi absurde, le paradoxe «plus-moins, moins-plus». Imaginez que les nombres d'habitants du recensement officiel de 2009 soient ceux de la figure 3 : la population des Bouches-du-Rhône diminue (de 1 000) par rapport à 1999 tandis que celle des Alpes-de-Haute-Provence augmente (de 1 200). Avec la méthode 1 + PFR, les Bouches-du-Rhône enlèvent un conseiller aux Alpes-de-Haute-Provence!

De ce paradoxe, on déduit l'importance d'un deuxième principe :

(b) Les résultats d'une méthode doivent toujours suivre les variations des populations : ne jamais, à la fois, donner plus de sièges à un département ayant moins d'habitants et moins de sièges à un autre département ayant plus d'habitants.

c) Cohérence avec elle-même

Examinons un troisième paradoxe : si une répartition est «juste» pour l'ensemble de tous les départements alors elle devrait être «juste» pour tout sous-ensemble de départements : chaque partie d'un partage équitable devrait être équitable. Pourtant, ce n'est pas le cas des méthodes PFR et 1 + PFR. Quand les 55 sièges alloués par la méthode 1 + PFR aux trois départements Bouches-du-Rhône, Alpes-de-Haute-Provence et Hautes-Alpes *(figure 4)* sont de nouveau répartis entre eux par 1 + PFR, ils reçoivent 47, 4 et 4 sièges au lieu de 46, 5 et 4 *(figure 2a)*, ou quand 52 sièges sont partagés par PFR, ils reçoivent 46, 3 et 3, et non 45, 4 et 3 *(figure 4)*. Donc un troisième principe, d'apparence anodine (comment imaginer qu'il ne s'applique pas?), mais important :

(c) Une méthode doit toujours être cohérente avec elle-même : toutes les fois qu'un ensemble de départements (dont les populations sont fixes) partage le même nombre de sièges, la méthode les répartit de la même manière.

d)Respecter la proportionnalité exacte

Il va de soi que dans le cas (quasiment impossible) où toutes les quotes-parts sont des nombres entiers, donc que l'idéal de la proportionnalité précise peut être réalisé, alors les quotes-parts elles-mêmes seraient la solution de toute méthode! Mais ce principe élémentaire d'équité, auquel PFR obéit, n'est évidemment pas satisfait par 1+PFR! D'où le dernier principe :

(d) Une méthode doit toujours être exacte : si une répartition parfaitement proportionnelle existe, elle doit la rendre.

Ces trois excellentes raisons nous incitent à reléguer PFR, la méthode des plus forts restes, à la poubelle, et la quatrième élimine définitivement 1+PFR. Mais alors, quelle méthode choisir?

L'approche normative

Une *méthode de répartition* est simplement une règle mathématique qui associe à n'importe quelle liste de populations et de sièges à partager, au moins une répartition. Il existe une infinité de méthodes possibles. Beaucoup d'entre elles ont été proposées – souvent à des fins précises.

Comment alors les comparer? Comment savoir qu'une méthode est meilleure ou pire qu'une autre? La tâche semble rude : pour pratiquement chacune, il existe des arguments éminemment convaincants!

L'approche normative évite les confrontations entre les qualités des diverses méthodes et tranche d'une autre manière. Elle propose la démarche opposée : parmi toutes les méthodes possibles, imaginables ou concevables, elle étudie toutes celles qui satisfont tous les critères précédents, c'est-à-dire *(a)* s'accordent avec une augmentation de sièges à pourvoir, *(b)* suivent les variations de populations, *(c)* sont cohérentes avec elles-mêmes et *(d)* sont exactes. Il pourrait exister une seule telle méthode, ou un grand nombre de telles méthodes, ou aucune, dans le cas de l'impossibilité. La réponse est positive : les méthodes de diviseur sont les seules, mais il y en a une infinité. Chacune est décrite sur la figure 6.

L'Assemblée nationale

La dernière et actuelle répartition de l'Assemblée nationale a été faite par une méthode de diviseur : celle d'Adams, avec la stipulation qu'aucun département n'aurait moins de 2 sièges. La figure 7 indique les nombres d'habitants des départements selon le recensement de 1999, l'actuelle répartition (fondée sur le recensement de 1982), les quotes-parts, ou les parts proportionnelles de 570 dues aux départements, et enfin les répartitions obtenues utilisant trois méthodes différentes : la *Plus forte moyenne (PFM)*, *Sainte-Laguë*, et *Adams*. Il est instructif de comparer ces répartitions.

Les penchants de ces méthodes sont évidents : la Plus forte moyenne a tendance à favoriser les grands départements au détriment des petits, Adams favorise les petits au dépit des grands. Le Nord avec une quote-part de 24,198 reçoit 26 sièges par PFM, mais seulement 23 avec Adams, Paris à qui est dû 20,127 reçoit 21 par PFM, mais 19 avec Adams ; à l'autre bout de la liste, à la Meuse dont la quote-part est 1,820, est accordé 1 siège par PFM, mais Adams donne à la Corse-du-Sud 2 sièges quand sa quote-part n'est que 1,123. L'application des diverses méthodes de diviseur aux problèmes pratiques de répartition à travers le monde démontre clairement – et l'analyse mathématique le confirme – que la Plus forte moyenne et Adams sont les deux extrêmes de la famille : la première favorise le plus les grands, la deuxième le plus les petits.

Le biais

Toute répartition privilégie certains départements et en pénalise d'autres. Un département, comme la Savoie, dont la quote-part est 3,535 est pénalisé avec une attribution de 3 sièges, et avantagé avec 4. Mais il est aussi évident à vue d'œil que la répartition

6. MÉTHODES DE RÉPARTITION

Le nombre n de départements (n = 100 en France, n = 50 aux États-Unis) est donné, tout comme le nombre h de sièges à distribuer (h = 570 en France, h = 435 aux États-Unis) ; p_i est le nombre d'habitants du $i$ème département et P la population du pays. La quote-part q_i du département i est $h(p_i/P)$, sa portion proportionnelle des h sièges. La partie entière de la quote-part q_i est notée $[q_i]$.

On distingue deux grandes familles de méthodes de répartition : les méthodes «des restes» et les méthodes «de diviseur».

Les méthodes des restes

Elles attribuent à chaque département la partie entière de sa quote-part $[q_i]$. Elles diffèrent dans la manière d'allouer les sièges non répartis $h - \sum[q_i]$. Les méthodes les plus connues sont :

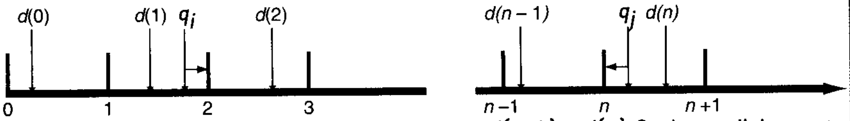
• la méthode des *Plus forts restes* (PFR), d'Alexander Hamilton (1792) ou de Samuel Vinton (1852) les affecte aux départements dont les restes, $r_i = q_i - [q_i]$, sont les plus grands ;

• la méthode de William Lowndes (1822) les affecte aux départements dont les «restes ajustés», $r_i/[q_i]$, sont les plus grands.

Toutes les méthodes de restes souffrent de ne pas toujours : (1) être en accord avec une augmentation de sièges à pourvoir, (2) suivre les variations de populations et (3) être cohérente avec elle-même. Mais (4) elles donnent toujours, à chaque département i, sa quote-part arrondie, soit en bas $[q_i]$, soit en haut $[q_i] + 1$.

Les méthodes de diviseur

On se donne une liste de seuils $d(i)$ entre paires de nombres entiers consécutifs, ce qui donne une façon d'arrondir un nombre réel à un de ses entiers voisins.



Le d-arrondi de q_i est égal à n si q_i est compris entre $d(n-1)$ et $d(n)$. Ce d-arrondi de q_i est unique sauf quand q_i est égal à $d(n)$, auquel cas q_i peut être pris égal à n ou $n + 1$.

Une méthode de diviseur correspond à chaque liste de seuils d. Dans ces méthodes, on applique la procédure suivante, qui revient à calculer la valeur de x pour laquelle la somme des d-arrondis de chaque département est égale au nombre h de sièges :

1) On choisit un diviseur commun x (par exemple, pour commencer, l'attribution idéale d'une des circonscriptions, $x_j = P/h$, c'est-à-dire la population totale P divisée par le nombre h total de sièges à pourvoir).

2) On calcule pour toutes les circonscriptions les quotients $q_i = p_i/x$ (on divise la population p_i de chaque département par x) ; si un quotient q_i est entre les entiers n et n+1, on l'arrondit, selon les seuils $d(n)$ propres à la méthode particulière utilisée, "en bas" à sa partie entière $n = [q_i]$, ou "en haut" à l'entier au dessus n+1.

3) On attribue temporairement à chaque département i, soit l'arrondi, soit, s'il est inférieur au minimum garanti à tous les départements, ce minimum.

4) Si la somme de ces attributions est le total voulu h, cette allocation est la bonne ; si la somme est inférieure, un diviseur commun plus petit que x est choisi ; si la somme est supérieure, un diviseur commun plus grand que x est choisi, jusqu'à ce que la somme des attributions donne le total voulu.

Les méthodes les plus connues sont :

• la méthode de John Quincy Adams (1832) où l'arrondi est toujours en haut, c'est-à-dire $d(n) = n$ (donc, par exemple, q_i égal à 3,117 donne 4) ;

• la méthode de la moyenne harmonique, ou de James Dean (1832), où $d(n) = n(n+1)/(n+1/2)$, donc, par exemple q_i égal à 3,456 donne 4 parce que $(3 \times 4/3{,}5) = 3{,}429$;

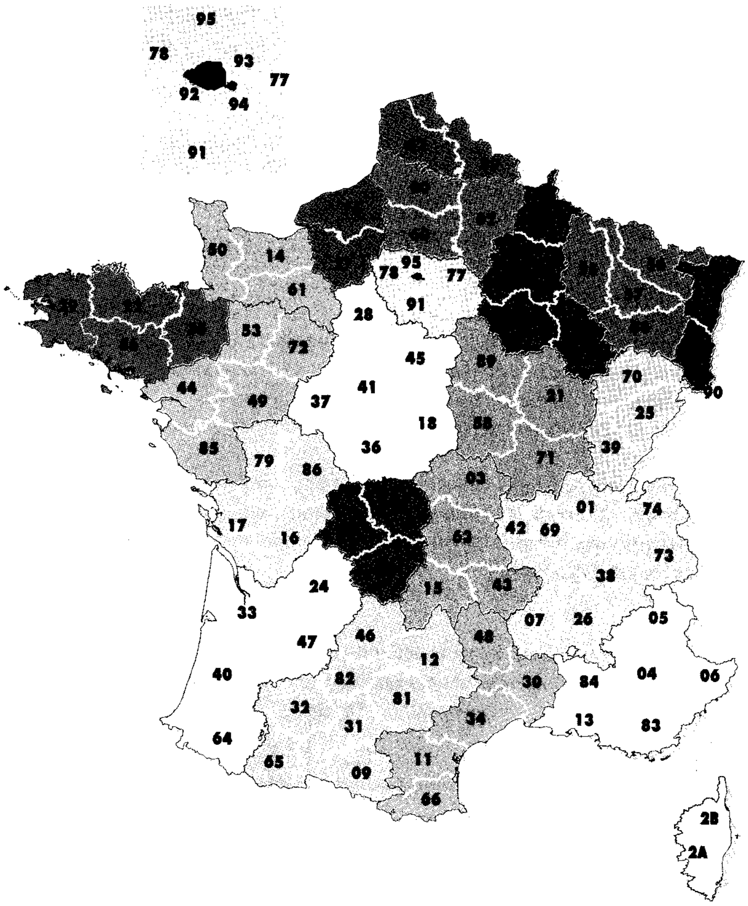
• la méthode d'Antoine Caritat, marquis de Condorcet (1792), où $d(n) = n + 0{,}4$;

• la méthode de Joseph Hill (1911), de la moyenne géométrique, ou de proportions égales, où $d(n) = \sqrt{n(n+1)}$;

• la méthode de Sainte-Laguë, de Daniel Webster (1832), de la moyenne arithmétique ou des nombres impairs, où $d(n) = n + 1/2$, ce qui revient à arrondir au plus proche entier ;

• la méthode de la plus forte moyenne, de Thomas Jefferson (1792), de Victor d'Hondt, de Hagenbach-Bischof, ou des plus grands diviseurs, l'arrondi est toujours en bas, c'est-à-dire $d(n) = n + 1$, (donc, par exemple, q_i égal à 7,883 donne 7).

En revanche, les définitions, explications et justifications d'une même méthode peuvent être très différentes selon le nom qu'elle porte ! Toutes les méthodes de diviseur garantissent (1), (2) et (3), mais pas toujours (4).



Département	No	Population	Act.	Qu.-Pt.	PFM	St-Lagüe	Adams
Nord	59	2.555.020	24	24,198	26	24	23
Paris	75	2.125.246	21	20,127	21	20	19
Bouches-du-Rh.	13	1.835.719	16	17,385	18	17	16
Rhône	69	1.578.869	14	14,953	16	15	14
Pas-de-Calais	62	1.441.568	14	13,652	14	14	13
Hauts-de-Seine	92	1.428.881	13	13,532	14	14	13
Seine-St-Denis	93	1.382.861	13	13,097	14	13	13
Yvelines	78	1.354.304	12	12,826	13	13	12
Gironde	33	1.287.334	11	12,192	13	12	12
Seine-Maritime	76	1.239.138	12	11,735	12	12	11
Val-de-Marne	94	1.227.250	12	11,623	12	12	11
Seine-et-Marne	77	1.193.767	9	11,306	12	11	11
Essonne	91	1.134.266	10	10,742	11	11	10
Loire-Atlantique	44	1.134.238	10	10,742	11	11	10
Val-d'Oise	95	1.105.464	9	10,469	11	10	10
Isère	38	1.094.006	9	10,361	11	10	10
Haute-Garonne	31	1.046.338	8	9,909	10	10	10
Bas-Rhin	67	1.026.120	9	9,718	10	10	9
Moselle	57	1.023.447	10	9,693	10	10	9
Alpes-Maritimes	06	1.011.326	9	9,578	10	10	9
Var	83	898.441	7	8,509	9	8	8
Hérault	34	896.441	7	8,490	9	8	8
Ille-et-Vilaine	35	867.533	7	8,216	8	8	8
Finistère	29	852.418	8	8,073	8	8	8
Oise	60	766.441	7	7,259	7	7	7
Maine-et-Loire	49	732.942	7	6,941	7	7	7
Loire	42	728.524	7	6,900	7	7	7
Meurthe-et-Mos.	54	713.779	7	6,760	7	7	7
Haut-Rhin	68	708.025	7	6,705	7	7	7
Réunion	974	706.300	5	6,689	7	7	7
Calvados	14	648.385	6	6,141	6	6	6
Morbihan	56	643.873	6	6,098	6	6	6
Haute-Savoie	74	631.979	5	5,982	6	6	6
Gard	30	623.125	5	5,901	6	6	6

7. RÉPARTITION DES SIÈGES À L'ASSEMBLÉE NATIONALE en fonction des populations des départements par des méthodes de diviseur. Pour obtenir la répartition *PFM*, utilisez le diviseur 97 234, soit, pour la Seine-Saint-Denis, 1 382 861/97 234 = 14,222 donc 14 sièges, et pour *PFM* avec un minimum de 1, prenez le diviseur 97 409. La répartition *PFM* avec un minimum de 1 est la même que *PFM* sans minimum sauf : un député de moins pour l'Aube et un de plus pour la Lozère. Pour obtenir la répartition *Sainte-Laguë*, utilisez le diviseur 105 796, soit pour les Hauts-de-Seine, 1 428 881/105 796 = 13,506 donc 14 sièges. Pour obtenir la répartition *Adams*,

de la méthode de Sainte-Laguë, qui ne favorise ni les petits ni les grands, est bien plus équilibrée. Cette observation est rigoureusement démontrable comme vérité mathématique : la méthode de Sainte-Laguë est l'unique méthode de diviseur qui n'a aucun biais. Sur un grand ensemble de problèmes, la moyenne des quotes-parts d'un département est égale à la moyenne des sièges qui lui seraient accordés par Sainte-Laguë.

Le favoritisme d'une répartition peut être apprécié de différentes manières. Pour l'Assemblée nationale, les 33 plus grands départements réunis ont 37 019 943 habitants, les 33 plus petits en ont 7 110 026. Les grands départements se voient attribuer 337 sièges par Adams, 351 par Sainte-Laguë et 363 par PFM ; et les petits, 79 par Adams, 66 par Sainte-Laguë et 59 par PFM. Donc, Adams accorde 109 851 habitants par député dans les grands départements, mais seulement 90 000 habitants par député dans les petits : les petits sont nettement favorisés. L'effet de PFM est opposé, 101 983 habitants par député pour les grands, 120 509 pour les petits : les grands sont avantagés.

En revanche, Sainte-Laguë est à peu près équilibrée, 105 470 habitants par député pour les grands départements et 107 728 pour les petits : un léger avantage pour les grands.

Pour mesurer le «biais», calculons tout d'abord le biais particulier entre deux départements. Par exemple, Paris avec 2 125 246 habitants a 20 sièges par la méthode de Sainte-Laguë, et le Doubs, avec 499 062 habitants, 5 sièges : à Paris, il y a 106 262 habitants par député et, dans le Doubs, 99 812 habitants par député. En conséquence, le Doubs est 106 262/99 812 = 1,06462 mieux représenté que Paris, et, ici, le biais particulier en faveur du petit est de 6,462 %. On pourrait aussi dire que le biais en faveur du grand est – 6,462 %. Le biais total en faveur des petits d'une répartition est alors la moyenne de tous les biais particuliers en faveur des petits (négatif quand le biais particulier est en faveur du grand) : dans notre cas, il faut évaluer la moyenne de 4 950 biais particuliers (le nombre de paires de départements, (100×99)/2)).

Par cette évaluation, les biais totaux en faveur des petits (avec un minimum d'un siège garanti à chaque département) sont : Adams 14,879 %, Sainte-Laguë –3,213%, et PFM –11,104%. Adams est effectivement toujours biaisée en faveur des petits, PFM toujours biaisée en faveur des grands. Parfois Sainte-Laguë est biaisée en faveur des grands, parfois en faveur des petits ; la moyenne des biais totaux sur beaucoup de problèmes approche la perfection, 0 %.

L'Article 24 de la Constitution française énonce : «[Le Sénat] assure la représentation des collectivités territoriales de la République…» On en déduit qu'afin d'assurer une voix suffisante à chaque département, la Constitution a

Département	No	Population	Act.	Qu.-Pt.	PFM	St-Lagüe	Adams
Loiret	45	618.126	5	5,854	6	6	6
Puy-de-Dôme	63	604.266	6	5,723	6	6	6
Pyrénées-Atlant.	64	600.018	6	5,683	6	6	6
Marne	51	565.229	6	5,353	5	5	5
Charente-Marit.	17	557.024	5	5,275	5	5	5
Somme	80	555.551	6	5,261	5	5	5
Indre-et-Loire	37	554.003	5	5,247	5	5	5
Saône-et-Loire	71	544.893	6	5,160	5	5	5
Côtes-d'Armor	22	542.373	5	5,137	5	5	5
Eure	27	541.054	5	5,124	5	5	5
Vendée	85	539.664	5	5,111	5	5	5
Aisne	02	535.842	5	5,075	5	5	5
Sarthe	72	529.851	5	5,018	5	5	5
Ain	01	515.270	4	4,880	5	5	5
Côte-d'Or	21	506.755	5	4,799	5	5	5
Vaucluse	84	499.685	4	4,732	5	5	5
Doubs	25	499.062	5	4,726	5	5	5
Manche	50	481.471	5	4,560	4	5	5
Drôme	26	437.778	4	4,146	4	4	4
Guadeloupe	971	422.496	4	4,001	4	4	4
Eure-et-Loire	28	407.665	4	3,861	4	4	4
Vienne	86	399.024	4	3,779	4	4	4
Pyr. Orient.	66	392.803	4	3,720	4	4	4
Dordogne	24	388.293	4	3,677	3	4	4
Martinique	972	381.427	4	3,612	3	4	4
Vosges	88	380.952	4	3,608	3	4	4
Savoie	73	373.258	3	3,535	3	4	4
Haute-Vienne	87	353.893	4	3,352	3	3	4
Allier	03	344.721	4	3,265	3	3	3
Deux-Sèvres	79	344.392	4	3,262	3	3	3
Tarn	81	343.402	4	3,252	3	3	3
Charente	16	339.628	4	3,216	3	3	3
Yonne	89	333.221	3	3,156	3	3	3
Landes	40	327.334	3	3,100	3	3	3
Loir-et-Cher	41	314.968	3	2,983	3	3	3
Cher	18	314.428	3	2,978	3	3	3
Aude	11	309.770	3	2,934	3	3	3
Lot-et-Garonne	47	305.380	3	2,892	3	3	3
Orne	61	292.337	3	2,769	3	3	3
Aube	10	292.131	3	2,767	3	3	3
Ardennes	08	290.130	3	2,748	2	3	3
Ardèche	07	286.023	3	2,709	2	3	3
Mayenne	53	285.338	3	2,702	2	3	3
Aveyron	12	263.808	3	2,498	2	2	3
Jura	39	250.857	3	2,376	2	2	3
Corrèze	19	232.576	3	2,203	2	2	3
Indre	36	231.139	3	2,189	2	2	3
Haute-Saône	70	229.732	3	2,176	2	2	2
Nièvre	58	225.198	3	2,133	2	2	2
Htes-Pyrénées	65	222.368	3	2,106	2	2	2
Haute-Loire	43	209.113	2	1,980	2	2	2
Tarn-et-Garonne	82	206.034	2	1,951	2	2	2
Hte-marne	52	194.873	2	1,846	2	2	2
Meuse	55	192.198	2	1,820	1	2	2
Gers	32	172.335	2	1,632	1	2	2
Lot	46	160.197	2	1,517	1	2	2
Guyane	973	157.213	2	1,489	1	1	2
Cantal	15	150.778	2	1,428	1	1	2
Haute-Corse	2B	141.603	2	1,341	1	1	2
Alpes-Hte-Prov.	04	139.561	2	1,322	1	1	2
Terr. de Belfort	90	137.408	2	1,301	1	1	2
Ariège	09	137.205	2	1,299	1	1	2
Creuse	23	124.470	2	1,179	1	1	2
Hautes-Alpes	05	121.419	2	1,150	1	1	2
Corse du Sud	2A	118.593	2	1,123	1	1	2
Lozère	48	73.509	2	0,696	0	1	1
TOTAL		60 186 184	570	570	570	570	570

on utilise le diviseur 115 025 soit, pour la Seine-Saint-Denis, 1 428 881/115 025 = 12,022 donc 13 sièges, et pour *Adams* avec un minimum de 2, on utilise le diviseur 115 517. Pour obtenir la répartition par la méthode de la moyenne géométrique, utilisez le diviseur 106 631 soit, pour les Hauts-de-Seine, 1 428 881/106 631 = 13,4. Comme ce nombre est inférieur à √(13x14), soit 13,491, on attribue aux Hauts-de-Seine 13 sièges. La répartition ainsi obtenue est celle de *Sainte-Laguë* sauf qu'il y a un député de moins pour les Hauts-de-Seine et les Alpes-Maritimes, un de plus pour l'Aveyron et la Guyane.

établi un Sénat pour garantir la représentation des collectivités territoriales. Nulle part est-il évoqué que chaque département doit avoir un minimum de 2 députés. Ce minimum de 2 représente un accord politique entre hommes politiques, et viole le fondement même de l'équité entre électeurs. Dans l'esprit de la loi, l'Assemblée doit représenter les électeurs, le Sénat, les terres.

Les idéaux de la Constitution – et le bon sens – isole donc la méthode de Sainte-Laguë, avec un minimum d'un siège par département : elle est la seule capable de répondre aux exigences des principes de l'équité.

Impossibilité

Comme l'écrivait Alfred de Musset :
La perfection, ami, n'est pas plus faite pour nous que l'immensité. Il faut ne la chercher en rien, ne la demander à rien, ni à l'amour, ni à la beauté, ni au bonheur, ni à la vertu ; mais il faut l'aimer pour être vertueux, beau et heureux autant que l'homme peut l'être.

Un autre principe, d'apparence inoffensif, dicte que si la quote-part d'un département est, par exemple, 24,198 alors ce département devrait avoir soit 24, soit 25 députés, mais certainement pas 26 ou plus, ni 23 ou moins ! Le lecteur n'a qu'à regarder la première ligne de la figure 6 pour voir qu'Adams et PFM violent toutes deux ce principe.

La situation semble bien pire : il n'existe aucune méthode de diviseur qui, pour tout problème, assure que chaque département soit doté de sa quote-part arrondie, soit en haut, soit en bas (un théorème d'impossibilité !). Même la méthode de Sainte-Laguë pourrait faire défaut. Par exemple, dans un pays avec une Assemblée de 57 sièges et 5 départements, un avec 507 000 habitants, les autres avec 15 600, 15 700, 15 800 et 15 900, Sainte-Laguë donnerait au premier 49 députés et 2 aux autres, mais la quote-part du premier est 50,70.

Que faire?

L'impasse est-elle totale ? Pas du tout. Parmi toutes les méthodes de diviseur, une est en pratique garantie de toujours répartir à un département un nombre de sièges qui diffère de sa quote-part par moins que 1 : la méthode de Sainte-Laguë. Dans le cas de la France, avec 100 départements, la possibilité pour cette méthode de donner plus que la quote-part arrondie en haut, ou moins que la quote-part arrondie en bas, est négligeable, sa probabilité se distingue à peine de zéro.

Donc, tous les principes d'équités sont réalisés par une et une seule méthode de répartition, celle de Sainte-Laguë : pourquoi en utiliser d'autres ? Pourquoi, dans un esprit de transparence, ne pas l'établir de droit une fois pour toutes ?

Une «dose» de proportionnelle : le système électoral mexicain.

La succession des lois électorales mexicaines récentes est pure délectation pour le mathématicien en quête d'exemples qui montrent à quel point les hommes politiques, leurs avocats et consultants politologues, soit manipulent à leur avantage… soit souffrent de manque de culture mathématique élémentaire… soit un peu des deux. Encore faut-il reconnaître que la transparence des pratiques électorales mexicaines permet l'analyse : en France, seuls des tableaux annoncent les répartitions de sièges, aucune explication des méthodes utilisées n'est donnée.

Une révolution électorale permanente

La Constitution mexicaine, promulguée en 1917, établit deux chambres, une Assemblée et un Sénat. Initialement, l'Assemblée avait 300 députés, élus dans des circonscriptions par un scrutin uninominal. L'écrasante domination du *Partido Revolutionario Institucional*, le PRI, privait de sièges tous les autres partis. D'où l'idée, à partir de 1963, d'introduire une «dose de proportionnelle», en supplément, pour faire entendre (au moins) les autres partis! Petit à petit, cette dose s'est renforcée, et depuis 1987, 300 députés «locaux» représentent les circonscriptions et 200 députés «politiques» représentent les partis à l'échelle nationale.

En votant pour un candidat dans une circonscription, l'électeur donne une voix au candidat «local», et une autre voix à son parti politique. Le pays est découpé en cinq grandes régions, où chaque parti présente une liste de candidats, et – en fonction des nombres d'élus «locaux» des partis et des nombres totaux de voix pour les partis dans chaque région – 40 députés sont choisis dans chaque région au sein des listes présentées par les partis.

Comment, dans la pratique, cette répartition est-elle faite? Les gouvernements ont donné plusieurs réponses à cette question. Elles s'améliorent… mais restent toutes contradictoires.

Après 70 années de pouvoir et la révolution institutionnalisée, l'élection présidentielle de 1988 fut un rude réveil : Carlos Salinas do Gortari du PRI fut élu, mais seulement après un arrêt d'une semaine dans le dépouillement des votes. Au lendemain, en 1989, une nouvelle loi électorale, truffée de contradictions, fut approuvée. Ses clauses, logiquement incohérentes, pouvaient conduire (entre autres absurdités) à garantir 251 députés à chacun des deux partis politiques dans une Assemblée de 500! Aux élections de 1991, le PRI obtint 320 députés.

En 1994, nouvelle loi électorale, moins incohérente, absurde tout de même. Aux élections de 1994, cette loi accorde au PRI 300 députés, toujours une majorité confortable. Appliquée aux résultats des élections de 1985, 1988, 1991 et 1994, elle aurait donné au PRI, respectivement 315, 300, 315 et 300 sièges : remarquables stabilités.

La loi, compliquée, de 1996

Une nouvelle loi électorale fut votée le 14 novembre 1996. Meilleure, incohérente tout de même, elle était inapplicable à l'élection de 1997.

Elle prescrit que les 200 députés «politiques» doivent être répartis au *prorata* des voix totales (de toutes les régions) des partis (par la méthode de plus fort reste, PFR), sauf qu'un parti ne peut pas avoir plus de 300 députés en tout, ni un pourcentage des 500 sièges qui serait de 8 % supérieur à son pourcentage des voix. Son application au scrutin de 1997 aide à comprendre. Des cinq partis en lice, le PAN a 64, le PRI 165, le PRD 70, le PT 1 et le PVEM aucun des 300 députés locaux. Les voix des partis dans chacune des régions sont indiquées sur la figure *A*.

Vu que le PRI eut au total 39,96 % des voix, il ne peut pas avoir plus que 47,96 % des 500 sièges, c'est-à-dire pas plus que 239,8 sièges : il est donc limité à, au plus, 74 députés locaux. Avec cette contrainte, la méthode PFR rend alors la répartition : PAN (57) PRI (74) PRD (55) PT (6) PVEM (8).

RÉGIONS	PAN	PRI	PRD	PT	PVEM	TOTAL
I	16↑	15	7↓	1	1	40
II	15	17	5	2	1	40
III	9	15	14↓	1↑	1	40
IV	8	14	15	1↓	2↑	40
V	8	13	16	1	2	40
TOTAL	**56↑**	**74**	**57↓↓**	**6**	**7↑**	**200**

B. LA RÉPARTITION des 200 députés «politiques», selon la loi de 1996 après l'élection de 1997. Les ajustements *ad hoc* faits pour corriger les failles de la loi sont indiqués par des flèches pointant vers le haut quand un siège a été ajouté, vers le bas quand un siège a été déduit.

Répartir ces sièges entre listes

Comment peut-on distribuer ces sièges entre les diverses listes des partis dans chaque région?

La loi répond : premièrement, les sièges de partis contraints doivent être répartis (par PFR) entre les cinq régions, donc aux listes du PRI sont allouées 15, 17, 15, 14 et 13 *(voir la figure B)* ; deuxièmement, les sièges qui restent à allouer dans chaque région – respectivement 25, 23, 25, 26, 27 – aux partis autre que le PRI, le sont par la méthode PFR. La loi donne alors la répartition de la figure *B*.

Scandale : le PAN aurait dû avoir 57 sièges, mais n'en a que 56, le PRD a un surplus de 2, et le pauvre petit dernier, le PVEM, perd un député!

Pourquoi? Tout simplement parce que la règle pour distribuer les sièges qui restaient se fondait seulement sur

RÉGIONS	PAN	PRI	PRD	PT	PVEM	TOTAL
I	2 504 484	2 379 785	1 019 822	118 673	197 098	6 219 862
II	2 138 564	2 543 570	687 162	303 794	112 721	5 785 811
III	909 386	2 354 047	1 377 933	126 342	90 373	4 858 081
IV	1 237 297	2 098 581	2 385 525	123 612	424 672	6 269 687
V	1 005 807	2 062 736	2 048 461	83 704	291 273	5 491 981
TOTAL	7 795 538	11 438 719	7 518 903	756 125	1 116 137	28 625 422
%	27,23	39,96	26,27	2,64	3,90	100

… dans les cinq régions du Mexique en 1997.

les régions (les lignes de la matrice) et ne tenait pas compte des sommes attribuées aux partis (des colonnes de la matrice) – à l'exception du PRI. Comment une telle erreur fut-elle possible? L'explication probable est que ce procédé, appliqué aux résultats de l'élection de 1994, fonctionnait: par hasard, les partis avaient tous reçu leur dû.

En fait, la loi précédente avait tenu compte seulement des sommes à attribuer aux partis (les colonnes), ce qui avait eu comme conséquence qu'au lieu de répartir exactement 40 sièges à chaque région, elles (les lignes) reçurent en 1994 respectivement 36, 39, 39, 43 et 43: il faut croire que c'est ce phénomène qui provoqua la réforme de 1996.

Le remède passa inaperçu: le *Consejo General del Instituto Federal Electoral*, la commission chargée de gérer les élections, conscient que la loi ne pouvait s'appliquer, inventa une règle *ad hoc* pour l'occasion... bien sûr, arbitraire et mauvaise! Les flèches de la figure *B* (vers le haut indique +1, vers le bas –1) montrent les ajustements apportés.

Néanmoins, ces actes semblent faire jurisprudence: ils attestent que l'objectif est bien une répartition qui garantit à chaque parti son dû et simultanément garantit à chaque région 40 députés.

Le problème bidimensionnel

Nous voilà confrontés à une nouvelle question mathématique: combien de sièges faut-il allouer aux 25 listes régionales des partis – la somme d'une région (d'une ligne) contrainte à 40, la somme d'un parti (d'une colonne) contraint à un nombre prédéterminé – quand on connaît les suffrages exprimés en faveur de chaque liste régionale? La méthode de Sainte-Laguë étant préférable à la répartition PFR, appliquons-la.

Si la méthode de Sainte-Laguë était appliquée aux partis, un par un (aux colonnes une par une, dans l'esprit de la loi de 1994), et que par chance les régions (les lignes) avaient chacune 40 députés, alors la répartition serait (semble-t-il) bonne. Et si la méthode de Sainte-Laguë était appliquée aux régions, une par une (aux lignes une par une, dans l'esprit de la loi de 1996 – à l'exception du parti des auteurs de la loi, le PRI) et par chance les partis (les colonnes) avaient chacun le nombre qu'il fallait, alors la répartition serait (semble-t-il) la bonne aussi.

Mais si ces deux approches donnaient toutes les deux des répartitions valables, laquelle choisir? Ne craignons rien, ce sera la même. Et si aucune d'entre elles n'était valable?

Avant d'adresser cette dernière possibilité, réinterprétons la méthode de Sainte-Laguë pour une région ou un parti. Quand les populations sont toutes divisées par le facteur commun x *(voir la figure 5)*, on peut voir le résultat – «les quotients» – comme étant les populations elles-mêmes, mais exprimées dans une échelle différente: au lieu de compter le nombre actuel de personnes, on compte le nombre de x personnes dans l'actuel (si $x = 100000$ et le nombre de personnes 345678, alors le nombre de 100 000 personnes dans 345 678 est 3,45678). Et bien sûr, l'échelle dans laquelle les populations sont comptées ne peut pas changer le problème de base! La méthode de Sainte-Laguë n'est rien d'autre que trouver l'échelle pour laquelle la somme des arrondis aux plus proches entiers des «quotients» des départements est le nombre total de sièges à allouer.

La même observation s'applique à chaque parti (ou colonne) et à chaque région (ou ligne) du problème matriciel: si on divise une ligne des votes

RÉGIONS		PAN	PRI	PRD	PT	PVEM
	DIVISEUR →	1 367	1 546	1 378	1 260	1 395
I	109	16,808	14,104	6,790	0,864	1,296
II	100	15,644	16,453	4,987	2,411	0,808
III	84	7,920	18,127	11,904	1,194	0,771
IV	110	8,228	12,340	15,738	0,892	2,767
V	96	7,664	13,898	15,485	0,692	2,175

C. LES «QUOTIENTS» sont égaux aux nombres de scrutins des listes des partis dans les régions (de la figure A) divisé par les diviseurs des lignes et des colonnes correspondantes. Par exemple, le quotient de la liste PRD de la région IV est 2 385 525 / (110 × 1 378) = 15,738. Ces diviseurs ont été calculés par un algorithme dont l'idée est simple: (1) trouver un diviseur pour chaque colonne, une par une, qui donne la solution de *Sainte-Laguë*, donc la somme des arrondis au plus proche entier dans chaque colonne sera la bonne. Gardez ces quotients (et oubliez les nombres de voix). (2) Puis passez aux lignes. Si la somme des arrondis dans une ligne n'est pas la bonne (autrement une répartition a déjà été obtenue), alors trouvez un diviseur pour cette ligne qui donne la solution de *Sainte-Laguë*. Gardez les nouveaux quotients, retournez aux colonnes et continuez à alterner entre lignes et colonnes. Cette procédure, avec quelques spécifications supplémentaires, rend presque toujours une répartition unique.

RÉGIONS	PAN	PRI	PRD	PT	PVEM	TOTAL
I	17	14	7	1	1	40
II	16	16	5	2	1	40
III	8	18	12	1	1	40
IV	8	12	16	1	3	40
V	8	14	15	1	2	40
TOTAL	**57**	**74**	**55**	**6**	**8**	**200**

D. LA RÉPARTITION **des 200 députés «politiques» selon la méthode de** ***Sainte-Laguë*** **biproportionnelle: l'élection de 1997. Là où cette répartition diffère de celle actuellement retenue, les chiffres sont soulignés: il y a 13 différences sur 25, une majorité!**

pour les diverses listes d'une région, ce n'est que l'échelle qui change, rien d'autre; et si on divise une colonne des votes pour les diverses listes d'un parti, seulement l'échelle a changé, là encore, rien d'autre.

La méthode de Sainte-Laguë biproportionnelle

L'approche normative au problème matriciel isole «la méthode de Sainte-Laguë biproportionnelle»: elle est la seule capable de répondre sans biais aux exigences des principes de base (généralisés au cadre matriciel).

Elle se résume ainsi: trouver des diviseurs x, un pour chaque ligne et un pour chaque colonne, tel que quand on arrondit au plus proche entier les voix exprimées dans ces nouvelles échelles, alors la somme des arrondis dans chaque ligne ou région est exactement 40, et leur somme dans chaque colonne ou de chaque parti est exactement le nombre voulu. Un algorithme itératif fait ce travail. Le résultat est, sauf *ex aequo*, unique.

Pour les élections mexicaines de 1997 *(voir la figure A)*, il suffit de diviser les lignes, de la première à la cinquième, par 109, 100, 81, 110 et 96, et les colonnes, de la première à la cinquième, par 1,367, 1,546, 1,378, 1,260 et 1,395. Les «quotients» obtenus se trouvent sur la figure *C*. Les arrondis aux plus proches entiers constituent la solution par la méthode de Sainte-Laguë *(voir la figure D)*.

Ce que fut l'intention du gouvernement est claire: une répartition matricielle biproportionnelle. Qui oserait lui reprocher d'avoir été incapable de trouver la bonne méthode? Personne de raisonnable: la solution n'est certainement pas évidente. Après tout, à chacun son métier. Mais pourquoi ne pas avoir demandé à ceux qui savent comment faire? La pratique mexicaine revue et corrigée pourrait-elle être intéressante pour un ajout de proportionnelle en France?